УДК 517. 956. 6.

ЗАДАЧА СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СМЕШАННОГО ТИПА

Карова Ф.А.

ФГБОУ ВПО «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова» Министерства образования и науки РФ, Нальчик, e-mail: _timka_86_86@mail.ru

Для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа третьего порядка путем редукции к уравнению Фредгольма второго рода исследован вопрос разрешимости задачи со смещением.

Ключевые слова: краевая задача со смещением, оператор дробного дифференцирования, оператор дробного интегрирования, задача Коши, уравнение Фредгольма, сингулярное интегральное уравнение.

BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH A SHIFT FOR MIXED TYPE EQUATION OF THE THIRD ORDER

Karova F.A.

FGBOU VPO «Kabardin-Balkar state university n.a. Kh.M. Berbekov», Nalchik, e-mail: _timka_86_86@mail.ru

The question of resolvability of a problem with displacement was investigated by a reduction to the Fredgolm's equation of a of the second sort for the equation of the mixed parabolo-hyperbolic type of the third order.

Keywords: a boundary value problem with a shift, operator of fractional differentiation, operator of fractional integration, Koshi's problem, Fredgolm's equation, singular integral equation.

Введение

Одним из основных разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными является теория уравнений смешанного типа. В настоящее время эта теория интенсивно развивается, так как появилось достаточно много прикладных задач, математическое моделирование которых обусловило исследование различных типов уравнений в рассматриваемой области изменения независимых переменных. Понятие уравнений смешанного типа в настоящее время включает всевозможные комбинации двух и более классических типов уравнений. Особый интерес представляют краевые задачи для уравнений с частными производными смешанного типа, так как они мало исследованы и находят применение в важных вопросах механики, физики и техники. Нелокальные краевые задачи для вырождающихся гиперболических и смешанного типов уравнений исследовались в работах [2-4], [5-9] и [11-13]. Подробная библиография содержится в [2].

Цель исследования: доказать существование решения задачи со смещением для параболо-гиперболического уравнения.

Постановка задачи.

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(u_{xx} - u_y\right), y > 0 \\ y^2 u_{xx} - u_{yy} + \lambda u_x, |\lambda| \le 1, y < 0 \end{cases} \quad (1)$$

в конечной области Ω, ограниченной отрезками AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $x = 0$, $x = 1$, $y = 1$ соответственно и характеристиками уравнения (1)

$$AC: x - \frac{(-y)^2}{2} = 0, BC: x + \frac{(-y)^2}{2} = 1.$$

Пусть

$$\Omega_1 = \Omega \cap (y > 0), \Omega_2 = \Omega \cap (y < 0).$$

Задача. Найти функцию *u(x,y)* со следующими свойствами:

1. $u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^{(3,1)}_{x,y}(\Omega_1) \cap$
$\cap\, C^{(2,2)}_{x,y}(\Omega_2), u_x(x,y) \in C(\overline{\Omega_1})$;
2. *u(x,y)* – решение уравнения (1) при $y \neq 0$;
3. *u(x,y)* удовлетворяет условиям

$$u(0,y) = \varphi_1(y), u_x(0,y) = \varphi_2(y), u_x(1,y) = \varphi_3(y), (2)$$

$$a(x)\frac{d}{dx}u[\theta_0(x)] + b(x)\frac{d}{dx}u[\theta_1(x)] + c(x)u(x,0) + d(x)u_y(x,0) = e(x),$$

причем

$$a(x), b(x), c(x), d(x), e(x) \in C^1(\bar{J}) \cap C^3(J), ц_i(y) \in C(\bar{J}),$$

$$a^2(x) + b^2(x) + c^2(x) + d^2(x) \neq 0,$$

где J – интервал $0 < x < 1$ прямой $y = 0$; $\theta_0(x)$, $\theta_1(x)$ – точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x,0)$ с характеристиками AC,BC.

Доказательство существования решения задачи.

Решение задачи Коши для уравнения (1) в области Ω_2 при $|\lambda| < 1$ имеет вид [1]

$$u(x,y)=c_1\int_0^1\tau\left[x+\frac{y^2(1-2t)}{2}\right]t^{-\frac{\lambda+3}{4}}(1-t)^{\frac{\lambda-3}{4}}dt+$$

$$+c_2y\int_0^1\nu\left[x+\frac{y^2(1-2t)}{2}\right]t^{-\frac{\lambda+1}{4}}(1-t)^{\frac{\lambda-1}{4}}dt,\ (4)$$

где $\tau(x)=u(x,0),\nu(x)=u_y(x,0)$,

$$c_1=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{4}\right)},c_2=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-\lambda}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{4}\right)}.$$

Вычислим $u[\theta_0(x)]=$

$$=\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{4}\right)c_1x^{\frac{1}{2}}D_{0x}^{\frac{\lambda-1}{4}}x^{\frac{\lambda-3}{4}}\tau(x)-c_2\Gamma\left(\frac{3-\lambda}{4}\right)D_{0x}^{\frac{\lambda-3}{4}}x^{\frac{\lambda-1}{4}}\nu(x),$$

$$u[\theta_1(x)]=$$

$$=\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{4}\right)c_1(1-x)^{\frac{1}{2}}D_{x1}^{-\frac{\lambda+1}{4}}(1-x)^{-\frac{\lambda+3}{4}}\tau(x)-$$

$$-c_2\Gamma\left(\frac{\lambda+3}{4}\right)D_{x1}^{-\frac{\lambda+3}{4}}(1-x)^{-\frac{\lambda+1}{4}}\nu(x),$$

где D^l_{ax} – здесь и далее, операторы дробного в смысле Римана – Лиувилля интегро – дифференцирования [10].

Переходя в уравнении (1) к пределу при $y\to+0$, получим соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из Ω_1 на J: $\tau'''(x)=\nu'(x)$.

Проинтегрировав последнее трижды с учетом условий (2), будем иметь

$$\tau(x)=\varphi_1(0)+\varphi_2(0)x+[\varphi_3(0)-\varphi_2(0)]\frac{x^2}{2}-$$

$$-\frac{x^2}{2}\int_0^1\nu(t)dt+\int_0^x(x-\xi)\nu(\xi)d\xi\,.\ (5)$$

Подставив $u[\theta_0(x)]$, $u[\theta_1(x)]$ и $\tau(x)$ из (5) в (3), получим уравнение относительно $\nu(x)$

$$-\frac{a(x)}{2}\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{4}\right)c_1\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}}D_{0x}^{\frac{\lambda-1}{4}}x^{\frac{\lambda-3}{4}}x^2\int_0^1\nu(\xi)d\xi+$$

$$+a(x)\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{4}\right)c_1\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}}D_{0x}^{\frac{\lambda-1}{4}}x^{\frac{\lambda-3}{4}}\int_0^x(x-\xi)\nu(\xi)d\xi-$$

$$-\frac{b(x)}{2}\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{4}\right)c_1\frac{d}{dx}(1-x)^{\frac{1}{2}}D_{x1}^{-\frac{\lambda+1}{4}}(1-x)^{-\frac{\lambda+3}{4}}x^2\int_0^1\nu(\xi)d\xi+$$

$$+b(x)\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{4}\right)c_1\frac{d}{dx}(1-x)^{\frac{1}{2}}D_{x1}^{-\frac{\lambda+1}{4}}(1-x)^{-\frac{\lambda+3}{4}}\int_0^x(x-\xi)\nu(\xi)d\xi-$$

$$-a(x)c_2\Gamma\left(\frac{3-\lambda}{4}\right)D_{0x}^{\frac{\lambda+1}{4}}x^{\frac{\lambda-1}{4}}\nu(x)+b(x)c_2\Gamma\left(\frac{\lambda+3}{4}\right)D_{x1}^{\frac{1-\lambda}{4}}(1-x)^{-\frac{\lambda+1}{4}}\nu(x)+$$

$$+d(x)\nu(x)-\frac{x^2}{2}c(x)\int_0^1\nu(\xi)d\xi+c(x)\int_0^x(x-\xi)\nu(\xi)d\xi=f(x).\ (6)$$

где

$$f(x)=e(x)-a(x)\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{4}\right)c_1\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}}D_{0x}^{\frac{\lambda-1}{4}}x^{\frac{\lambda-3}{4}}\times$$

$$\times\left[\varphi_1(0)+\varphi_2(0)x+\frac{x^2}{2}\left(\varphi_3(0)-\varphi_2(0)\right)\right]-$$

$$-b(x)\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{4}\right)c_1\frac{d}{dx}(1-x)^{\frac{1}{2}}D_{x1}^{-\frac{\lambda+1}{4}}(1-x)^{-\frac{\lambda+3}{4}}\times$$

$$\times\left[\varphi_1(0)+\varphi_2(0)x+\frac{x^2}{2}\left(\varphi_3(0)-\varphi_2(0)\right)\right]-$$

$$-c(x)\left[\varphi_1(0)+\varphi_2(0)x+\frac{x^2}{2}\left(\varphi_3(0)-\varphi_2(0)\right)\right].$$

Из условий гладкости на известные функции следует, что $f(x)\in C(\bar{J})\cap C^1(J)$. Уравнение (6) после преобразований примет вид

$$A(x)\nu(x)-B(x)\int_0^1\nu(\xi)d\xi+\int_0^x C(x,\xi)\nu(\xi)d\xi+\int_x^1 D(x,\xi)\nu(\xi)d\xi+$$

$$+F(x)D_{0x}^{\frac{\lambda+1}{4}}x^{\frac{\lambda-1}{4}}\nu(x)+E(x)D_{x1}^{\frac{1-\lambda}{4}}(1-x)^{-\frac{\lambda+1}{4}}\nu(x)=f(x),\ (7)$$

где

$$A(x)=b(x)\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{4}\right)c_1\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{4}\right)\left[\frac{(\lambda+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}-\frac{\Gamma\left(\frac{5-\lambda}{4}\right)\Gamma\left(\frac{9-\lambda}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3-\lambda}{4}\right)\Gamma(2)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\right](1-x)+$$

$$+d(x);$$

$$B(x)=\frac{a(x)}{2}\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{4}\right)c_1\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+9}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}2x+$$

$$+\frac{b(x)}{2}\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{4}\right)c_1\frac{\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{4}\right)(1-\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left[\frac{1+\lambda}{6}+\frac{(5-\lambda)x}{6}\right]+\frac{x^2}{2}c(x);$$

$$C(x,\xi)=a(x)\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{4}\right)c_1\frac{1}{\Gamma\left(\frac{9-\lambda}{4}\right)}\left(\frac{x-\xi}{x}\right)^{\frac{1-\lambda}{4}}\left[F\left(\frac{1-\lambda}{4},\frac{3-\lambda}{4},3-\frac{\lambda+3}{4};\frac{x-\xi}{x}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\lambda-1}{4}\frac{\xi}{x}F\left(\frac{5-\lambda}{4},\frac{3-\lambda}{4},\frac{9-\lambda}{4};\frac{x-\xi}{x}\right)\right]+\left[c(x)(x-\xi)-b(x)\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{4}\right)c_1\frac{\lambda\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right];$$

$$D(x,\xi)=\frac{\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{4}\right)\left(\frac{1-\lambda}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3-\lambda}{4}\right)}\left(\frac{1-\xi}{1-x}\right)^{2-\frac{\lambda+3}{4}}F\left(\frac{5-\lambda}{4},\frac{3-\lambda}{4},\frac{9-\lambda}{4};\frac{1-\xi}{1-x}\right);$$

$$F(x)=-a(x)c_2\Gamma\left(\frac{3-\lambda}{4}\right);$$

$$E(x)=b(x)c_2\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{4}\right);$$

где $F(a,b,c,z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса [10].

Подействовав на обе части полученного уравнения оператором $D_{0x}^{-\frac{\lambda+1}{4}}$, окончательно получим уравнение Фредгольма второго рода

$$A^*(x)\nu(x)+\int_0^1 K(x,\xi)\nu(\xi)d\xi=f(x),\ (8)$$

где

$$A^*(x)=\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{4}\right)F(x)x^{\frac{\lambda-1}{4}}+\frac{2-\lambda}{\lambda\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{4}\right)}E(x)x^{\frac{\lambda}{2}}(1-x)^{-\frac{\lambda+1}{4}}.$$

$$K(x,\xi)=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{A(\xi)}{(x-\xi)^{\frac{3-\lambda}{4}}}-\displaystyle\int_0^x\frac{B(t)dt}{(x-t)^{\frac{3-\lambda}{4}}}+\int_\xi^x\frac{C(t,\xi)dt}{(x-t)^{\frac{3-\lambda}{4}}}+\int_0^\xi\frac{D(t,\xi)dt}{(x-t)^{\frac{3-\lambda}{4}}}+\frac{\xi^{\lambda-1}}{\Gamma\left(\frac{3-\lambda}{4}\right)}\times \\ \times\displaystyle\int_\xi^x\frac{\left[-F'(t)+\left(\frac{3-\lambda}{4}\right)\frac{F(x)-F(t)}{x-t}\right]dt}{(x-t)^{\frac{3-\lambda}{4}}(t-\xi)^{\frac{1+\lambda}{4}}}+\frac{E(0)-2E(x)}{\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{4}\right)}(1-\xi)^{-\frac{\lambda+1}{4}}\xi^{\frac{\lambda-1}{4}}+K_1(x,\xi);\text{ при } \xi\le x \\ \displaystyle\int_0^x\frac{B(t)dt}{(x-t)^{\frac{3-\lambda}{4}}}+\int_0^x\frac{D(t,\xi)dt}{(x-t)^{\frac{3-\lambda}{4}}}+\frac{E(0)-2E(x)}{\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{4}\right)}(1-\xi)^{-\frac{\lambda+1}{4}}\xi^{\frac{\lambda-1}{4}}+K_2(x,\xi);\text{ при } \xi\ge x\end{cases}$$

Таким образом, вопрос существования решения задачи (1) – (3) эквивалентен вопросу разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода (8) со слабой особенностью в ядре $K(x,\xi)$. По найденному $\nu(x)$ можно определить $\tau(x)$ по формуле (5) и решение задачи (1) – (3) в области Ω_2 по формуле (4), а в области Ω_1 как решение задачи (1), (2), $u(x,0)=\tau(x)$ [2].

Список литературы

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 488 с.

2. Джураев Т.Д., Сопуев А.С., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. – Ташкент: ФАН, 1986. – 220 с.

3. Елеев В.А., Кумыкова С.К. Внутреннекраевая задача для уравнения смешанного типа третьего порядка с кратными характеристиками // Известия Кабардино-Баларского научного центра РАН. – 2010. – № 5. – С. 5–14.

4. Кумыкова С.К. Задача с нелокальными условиями на характеристиках для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения. – 1981. – Т. 17, № 1. – С. 81–90.

5. Нахушев А.М. К теории линейных краевых задач для уравнения второго порядка смешанного гиперболо-параболического типа // Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т. 14, № 1. – С. 66–73.

6. Репин О.А., Кумыкова С.К. Об одной краевой задаче со смещением для уравнения смешанного типа в неограниченной области // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48, №8. – С. 1140–1149.

7. Репин О.А., Кумыкова С.К. О задаче с обобщенными операторами дробного дифференцирования для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Вестник Самарского государственного университета. – 2012. – № 9. – С. 52–60.

8. Репин О.А., Кумыкова С.К. О задаче с обобщенными операторами дробного дифференцирования для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2013. – №1. – С. 150–158.

9. Репин О.А., Кумыкова С.К. Задача со смещением для уравнения третьего порядка с разрывными коэффициентами // Вестник Самарского государственного университета. Серия: Физико-математические науки. – 2012. – № 4. – С. 17–25.

10. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

11. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. – М.: ИЛ, 1960. –299 с.

12. Repin O.A., Kumykova S.K. A problem with generalized fractional integro-differentiation operators of arbitrary orders // Russian mathematics. – 2012. –№ 56 (12). – P. 50–60.

13. Repin O.A., Kumykova S.K. On a boundary value problem with a shift for an equation of mixed type in an unbounded domain // Differential Equations. – 2012. – № 48 (8). – P. 1127–1136.